

Présentation pour le prix IABE

Valorisation d'un contrat d'assurance vie dans un modèle d'Heston-Hull et
White²

Benjamin Roelants du Vivier

22 juin 2021

Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

**Benjamin Roelants
du Vivier**

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

**Benjamin Roelants
du Vivier**

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Assuré



Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Assuré



Assureur



Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Assuré



Prime unique en $t=0$



Assureur



Assuré



Prime unique en $t=0$



Assureur



Assuré



Prime unique en $t=0$



Assureur

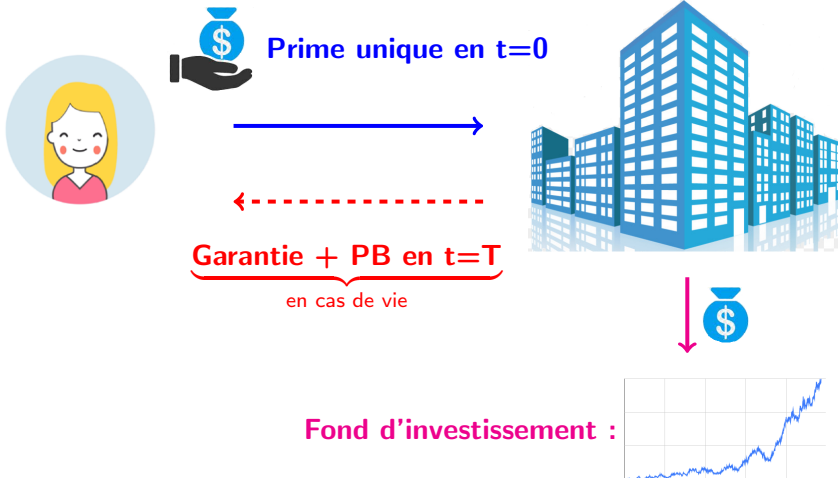


Fond d'investissement :



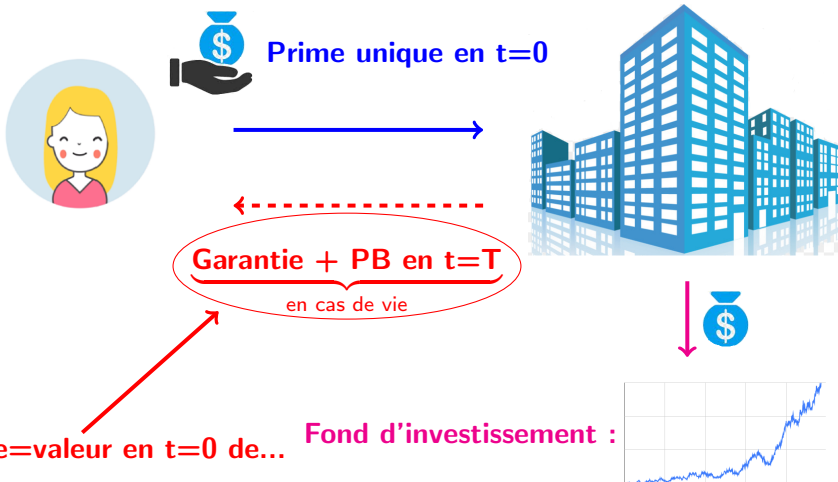
Assuré

Assureur



Assuré

Assureur



Fair value=valeur en $t=0$ de...

Fond d'investissement :

Contrat d'assurance vie à capital différé avec participation bénéficiaire (PB) sous forme de terminal bonus émis au temps $t=0$

Un tel contrat consiste, pour l'assureur, en cas de survie de l'assuré à **maturité**, à payer un montant fixe C , appelée garantie, plus un bonus et rien en cas de décès de l'assuré avant la maturité.

Fair value

La fair value en zéro est la valeur que l'assureur doit prévoir en $t=0$ de sorte de pouvoir honorer ses prestations futures.

Contrat d'assurance vie à capital différé avec participation bénéficiaire (PB) sous forme de terminal bonus émis au temps $t=0$

Un tel contrat consiste, pour l'assureur, en cas de survie de l'assuré à **maturité**, à payer un montant fixe C , appelée garantie, plus un bonus et rien en cas de décès de l'assuré avant la maturité.

Fair value

La fair value en zéro est la valeur que l'assureur doit prévoir en $t=0$ de sorte de pouvoir honorer ses prestations futures.

Oui mais comment calculer cette fair value alors que le futur est par essence incertain ?

Incertitudes :

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;
- ▶ La valeur de la PB est inconnue puisqu'elle dépend de l'évolution du fond d'investissement dans lequel ont été investies les primes ;

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;
- ▶ La valeur de la PB est inconnue puisqu'elle dépend de l'évolution du fond d'investissement dans lequel ont été investies les primes ;
- ▶ L'évolution des taux d'intérêts est inconnue.

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;
 - ▶ La valeur de la PB est inconnue puisqu'elle dépend de l'évolution du fond d'investissement dans lequel ont été investies les primes ;
 - ▶ L'évolution des taux d'intérêts est inconnue.
-

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;
- ▶ La valeur de la PB est inconnue puisqu'elle dépend de l'évolution du fond d'investissement dans lequel ont été investies les primes ;
- ▶ L'évolution des taux d'intérêts est inconnue.

**Utilisation de processus stochastiques pour
modéliser ces sources d'incertitude**

Incertitudes :

- ▶ Il se pourrait que l'assuré meure avant la fin du contrat ;
- ▶ La valeur de la PB est inconnue puisqu'elle dépend de l'évolution du fond d'investissement dans lequel ont été investies les primes ;
- ▶ L'évolution des taux d'intérêts est inconnue.

**Utilisation de processus stochastiques pour
modéliser ces sources d'incertitude**

⇒ Calcul de la fair value

Contexte

Présentation pour
le prix IABE

Benjamin Roelants
du Vivier

Contexte

Objectif

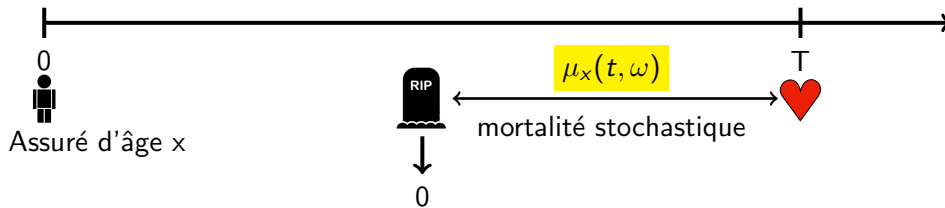
Modélisation

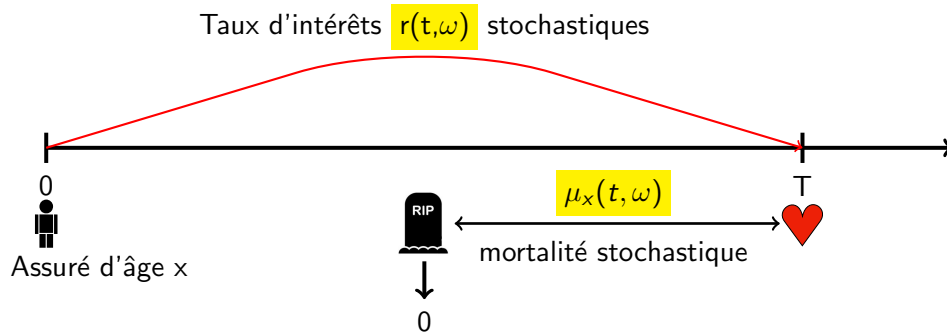
Résumé

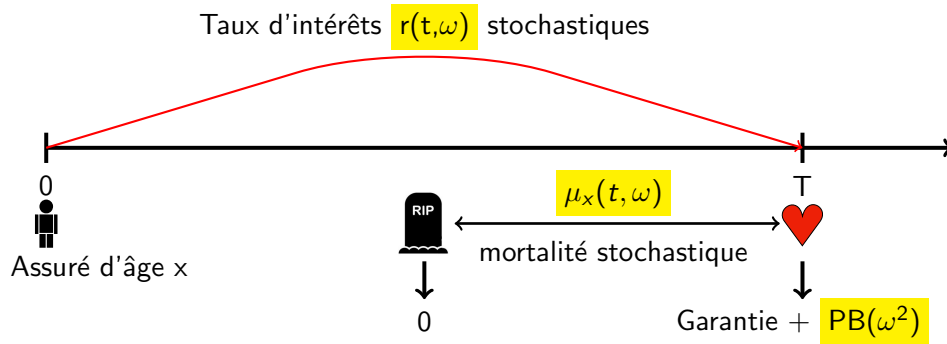
Résultat

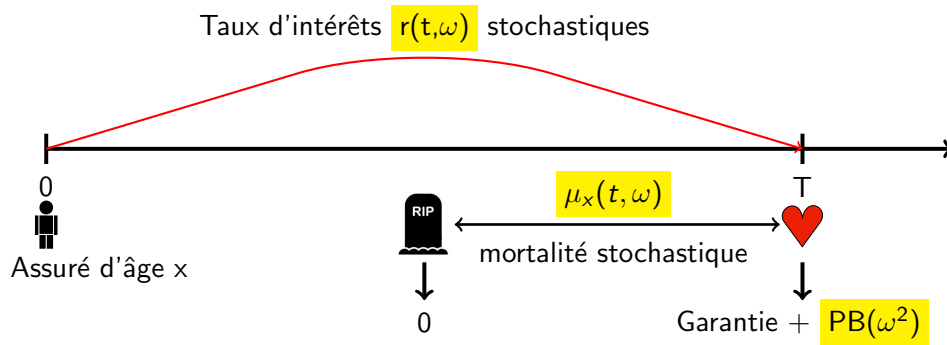
Conclusions et
perspectives



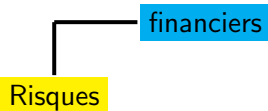
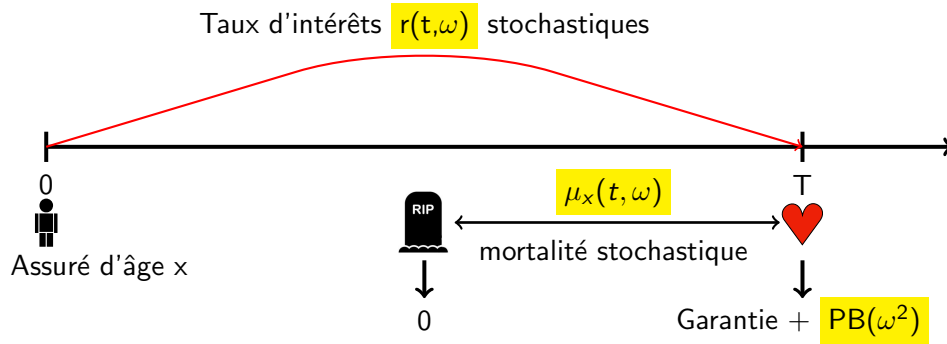


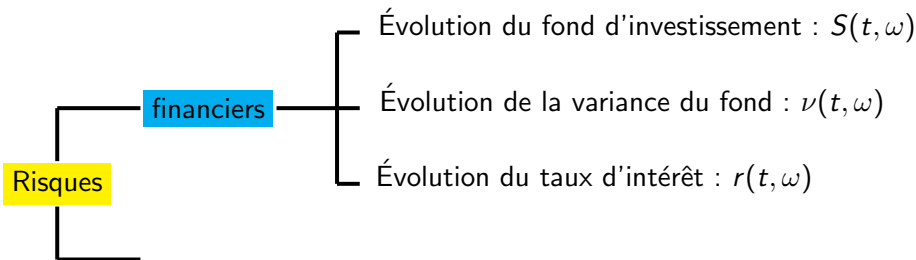
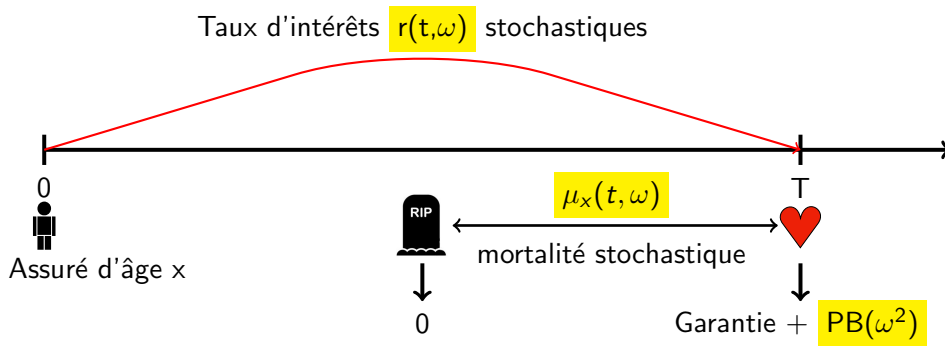


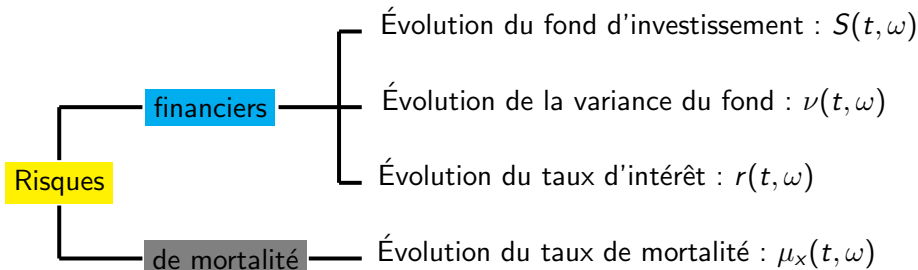
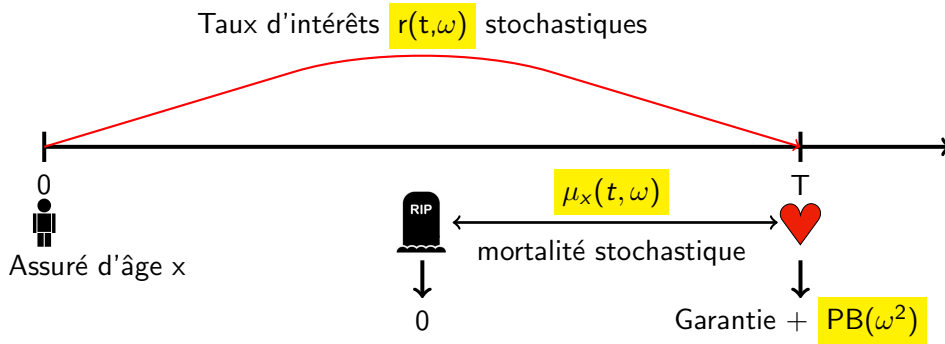




Risques







Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

Benjamin Roelants
du Vivier

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Objectif : calculer la fair value du contrat d'assurance vie

Objectif : calculer la fair value du contrat d'assurance vie

Le théorème fondamental du pricing nous livre

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(C + \text{PB}(T)) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| \mathcal{H}_t \right]$$

Objectif : calculer la fair value du contrat d'assurance vie

Le théorème fondamental du pricing nous livre

Espérance sous la mesure risque neutre

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{(C + \text{PB}(T)) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right)}_{\text{de la somme des cashflows (probabilisés)}} \underbrace{\exp \left(- \int_t^T r_u du \right)}_{\text{actualisés}} \middle| \mathcal{H}_t \right]$$

Calculus

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(C + \text{PB(T)}) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right) | \mathcal{H}_t \right]$$

- Dépend de l'évolution du fond d'investissement via $S(t, \omega)$ et de l'évolution de la variance de ce fond via $\nu(t, \omega)$.

Calculer

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(C + \text{PB}(T)) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right) \middle| \mathcal{H}_t \right]$$

- ▶ Dépend de l'évolution du fond d'investissement via $S(t, \omega)$ et de l'évolution de la variance de ce fond via $\nu(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $r(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $\mu_x(t, \omega)$.

Calculer

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(C + \text{PB}(T)) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right) \middle| \mathcal{H}_t \right]$$

- ▶ Dépend de l'évolution du fond d'investissement via $S(t, \omega)$ et de l'évolution de la variance de ce fond via $\nu(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $r(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $\mu_x(t, \omega)$.

Calculus

$$FV(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(C + \text{PB(T)}) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \exp \left(- \int_t^T \mu_{x,u} du \right) | \mathcal{H}_t \right]$$

- ▶ Dépend de l'évolution du fond d'investissement via $S(t, \omega)$ et de l'évolution de la variance de ce fond via $\nu(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $r(t, \omega)$.
- ▶ Dépend de l'évolution du taux d'intérêt via $\mu_x(t, \omega)$.

Il nous reste à **modéliser chacun des quatre processus stochastiques** pour pouvoir calculer cette espérance.

Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

**Benjamin Roelants
du Vivier**

Contexte

Objectif

Modélisation

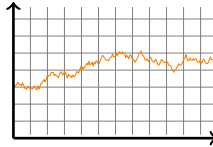
Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Risques financiers

$S(t)$

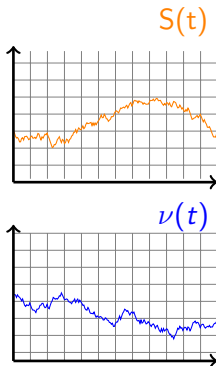


Modèle brownien géométrique

- ✓ Croissance exponentielle
- ✓ Strictement positif

Risques financiers

Risques financiers



Modèle brownien géométrique

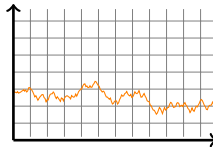
- ✓ Croissance exponentielle
- ✓ Strictement positif

Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

- ✓ Retour à la moyenne
- ✓ Strictement positif

Risques financiers

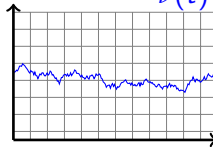
$S(t)$



Modèle brownien géométrique

- ✓ Croissance exponentielle
- ✓ Strictement positif

$\nu(t)$



Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

- ✓ Retour à la moyenne
- ✓ Strictement positif

$r(t)$

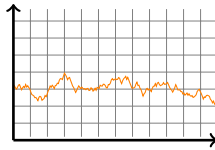


Modèle de Hull et White

- ✓ Retour à la moyenne
- ✓ Positif ou négatif

Risques financiers

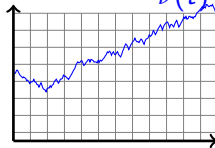
$S(t)$



Modèle brownien géométrique

- ✓ Croissance exponentielle
- ✓ Strictement positif

$\nu(t)$



Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

- ✓ Retour à la moyenne
- ✓ Strictement positif

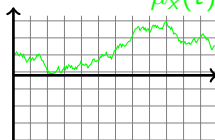
$r(t)$



Modèle de Hull et White

- ✓ Retour à la moyenne
- ✓ Positif ou négatif

$\mu_x(t)$



Modèle de Hull et White

- ✓ Retour à la moyenne
- ✗ Positif

Risque d'assurance

Modélisation de chacun des quatre processus stochastiques

Modèle de Heston-Hull et White² sous $\mathbb{Q}$ avec dépendance possible entre risques financiers et risque de longévité

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fond d'investissement :} & dS_t = r_t S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S \\ \text{Volatilité :} & d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^\nu \\ \text{Taux d'intérêt :} & dr_t = \lambda(\bar{r}_t - r_t)dt + \eta dW_t^r \\ \text{Taux de mortalité} & d\mu_{x,t} = \omega(\bar{\mu}_{x,t} - \mu_{x,t})dt + \varepsilon dW_t^\mu \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{modèle BG à vol. stoch.} \\ \text{modèle de CIR} \\ \text{modèle de Hull et White} \\ \text{modèle de Hull et White} \end{array}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^\nu] = \rho^{S,\nu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^\mu] = \rho^{S,\mu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^r] = \rho^{S,r} dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^r dW_t^\nu] = \rho^{r,\nu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^r dW_t^\mu] = \rho^{r,\mu} dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^\mu dW_t^\nu] = \rho^{\mu,\nu} dt, \end{array} \right.$$

Modélisation de chacun des quatre processus stochastiques

Modèle de Heston-Hull et White² sous $\mathbb{Q}$ avec dépendance possible entre risques financiers et risque de longévité

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fond d'investissement :} & dS_t = r_t S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t^S \\ \text{Volatilité :} & d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^\nu \\ \text{Taux d'intérêt :} & dr_t = \lambda(\bar{r}_t - r_t)dt + \eta dW_t^r \\ \text{Taux de mortalité} & d\mu_{x,t} = \omega(\bar{\mu}_{x,t} - \mu_{x,t})dt + \varepsilon dW_t^\mu \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{modèle BG à vol. stoch.} \\ \text{modèle de CIR} \\ \text{modèle de Hull et White} \\ \text{modèle de Hull et White} \end{array}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^\nu] = \rho^{S,\nu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^\mu] = \rho^{S,\mu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^S dW_t^r] = \rho^{S,r} dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^r dW_t^\nu] = \rho^{r,\nu} dt, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^r dW_t^\mu] = \rho^{r,\mu} dt \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dW_t^\mu dW_t^\nu] = \rho^{\mu,\nu} dt, \end{array} \right.$$

Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

Benjamin Roelants
du Vivier

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

Article (Devolder et Azizieh, 2013)

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique

Risque de longévité

Indépendance entre risques financiers et risque de longévité

Article (Devolder et Azizieh, 2013)

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique

Risque de longévité

Indépendance entre risques financiers et risque de longévité

Double généralisation



Article (Devolder et Azizieh, 2013)

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique

Risque de longévité

Indépendance entre risques financiers et risque de longévité

Double généralisation

1. Relaxer l'hypothèse d'indépendance entre risques financiers et risques de longévité



Article (Devolder et Azizieh, 2013)

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique

Risque de longévité

Indépendance entre risques financiers et risque de longévité

Double généralisation

1. Relaxer l'hypothèse d'indépendance entre risques financiers et risques de longévité
2. Prise en considération d'une volatilité stochastique et non constante.

Article (Devolder et Azizieh, 2013)

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique

Risque de longévité

Indépendance entre risques financiers et risque de longévité

Double généralisation

1. Relaxer l'hypothèse d'indépendance entre risques financiers et risques de longévité
2. Prise en considération d'une volatilité stochastique et non constante.

Objectif

Risques financiers

- Fonds d'investissement
- Taux d'intérêt stochastique
- Volatilité stochastique

Risque de longévité

Dépendance possible entre risques financiers et risque de longévité

Résumé

Présentation pour
le prix IABE

**Benjamin Roelants
du Vivier**

Contexte

Objectif

Modélisation

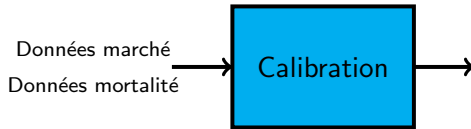
Résumé

Résultat

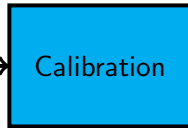
Conclusions et
perspectives

Données marché

Données mortalité



Données marché
Données mortalité



Param	
κ	0.7
θ	1.1
ξ	0.03
λ	0.1
η	0.03
ω	0.6
ε	0.08
$\rho^{S,\nu}$	0.2
$\rho^{S,\mu}$	0.9
$\rho^{S,r}$	0.8
$\rho^{r,\nu}$	0.7
$\rho^{r,\mu}$	0.5
$\rho^{\mu,\nu}$	0.3

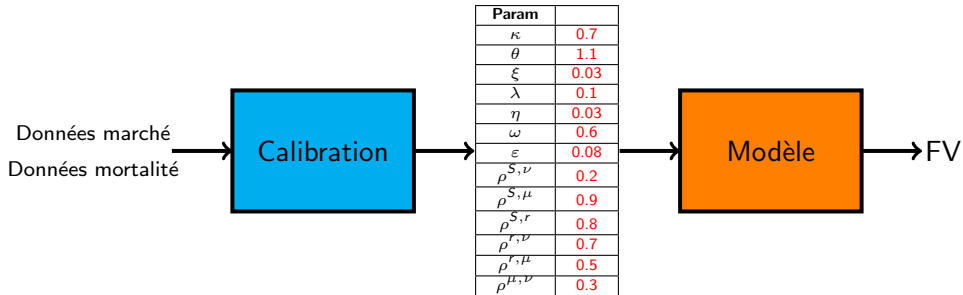
Données marché
Données mortalité

Calibration

Param	
κ	0.7
θ	1.1
ξ	0.03
λ	0.1
η	0.03
ω	0.6
ε	0.08
$\rho^{S,\nu}$	0.2
$\rho^{S,\mu}$	0.9
$\rho^{S,r}$	0.8
$\rho^{r,\nu}$	0.7
$\rho^{r,\mu}$	0.5
$\rho^{\mu,\nu}$	0.3

Modèle

Résumé



Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

Benjamin Roelants
du Vivier

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et
perspectives

$$FV^F(t) = \eta \frac{C}{(1+i)^T} \left\{ \frac{fc_{a,p}(-i; \nu, \mu_x, r, x)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{ifc_{a,p}(u - i; \nu, \mu_x, r, x) e^{-iu \ln((1+i)^T)}}{u} \right] du \right\} \\ - \eta C \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{ifc_{a,p}(u; \nu, \mu_x, r, x) e^{-iu \ln((1+i)^T)}}{u} \right] du \right\}$$

avec

$$fc_{a,p}(u; \nu, \mu_x, r, x) = e^{\phi(T-t,u) + \psi_1(T-t,u)\nu_t + \psi_2(T-t,u)\mu_{x,t} + \psi_3(T-t,u)r_t + \psi_4(T-t,u)x_t}$$

où

Code couleur	Modèle	Fonction
	Heston pour $x(t)$ et $\nu(t)$	$\psi_4(\tau, u)$ et $\psi_1(\tau, u)$
	Hull et White pour $r(t)$	$\psi_3(\tau, u)$
	Hull et White pour $\mu_x(t)$	$\psi_2(\tau, u)$

$$\phi(\tau, u) = +\kappa\theta \left\{ \frac{(\gamma - iu\xi\rho^{S,\nu} + \kappa)}{\xi^2} \tau - \frac{2}{\xi^2} \ln \left[\frac{(iu\xi\rho^{x,\nu} - \kappa)(1 - e^{\gamma\tau}) + \gamma(1 + e^{\gamma\tau})}{2\gamma} \right] \right\} \\ + \frac{1}{2}\eta^2 \left\{ \frac{(iu-1)^2}{\lambda^2} \tau - \frac{2(iu-1)^2}{\lambda^2} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} \right) + \frac{(iu-1)^2}{\lambda^2} \left(\frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2\lambda} \right) \right\} + \lambda\bar{r} \left[\frac{(iu-1)}{\lambda} \tau + \frac{(iu-1)}{\lambda^2} (e^{-\lambda\tau} - 1) \right] \\ + \eta\rho^{S,r} iu \left\{ a \left[\frac{(iu-1)}{\lambda} \tau + \frac{(iu-1)}{\lambda^2} (e^{-\lambda\tau} - 1) \right] + be^{-c\tau} \left[\frac{(iu-1)}{\lambda c} (e^{c\tau} - 1) - \frac{(iu-1)}{\lambda(c-\lambda)} (e^{(c-\lambda)\tau} - 1) \right] \right\} \\ + \left[\int_0^\tau \xi\eta(a + be^{-c(T-s)})\rho^{r,\nu}\psi_1(\tau, s)\psi_3(\tau, s)ds \right] \Big|_{u=(0,0,0,iu)} \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left\{ \frac{\tau}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \left(\frac{1 - e^{-\omega\tau}}{\omega} \right) + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1 - e^{-2\omega\tau}}{2\omega} \right) \right\} + \omega\bar{\mu} \left[-\frac{\tau}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-\omega\tau} - 1) \right] + \varepsilon\rho^{S,\mu} iu \left\{ a \left[-\frac{\tau}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} (e^{-\omega\tau} - 1) \right] \right. \\ \left. + be^{-c\tau} \left[-\frac{1}{\omega c} (e^{c\tau} - 1) + \frac{1}{\omega(c-\omega)} (e^{(c-\omega)\tau} - 1) \right] \right\} + \left[\int_0^\tau \xi\varepsilon(a + be^{-c(T-s)})\rho^{\mu,\nu}\psi_1(\tau, s)\psi_2(\tau, s)ds \right] \Big|_{u=(0,0,0,iu)} \\ + \eta\varepsilon\rho^{r,\mu} \left\{ \left[\frac{(iu-1)}{\lambda^2\omega} + \frac{(iu-1)}{\lambda\omega^2} - \frac{(iu-1)}{\lambda\omega(\lambda+\omega)} \right] - \left[\frac{(iu-1)}{\lambda\omega} \right] \tau - \frac{(iu-1)}{\lambda^2\omega} e^{-\lambda\tau} - \frac{(iu-1)}{\lambda\omega^2} e^{-\omega\tau} + \frac{(iu-1)}{\lambda\omega(\lambda+\omega)} e^{-(\lambda+\omega)\tau} \right\}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\tau, u) = \frac{(1 - e^{\gamma\tau})(-u^2 - iu)}{(1 - e^{\gamma\tau})(-iu\xi\rho^{x,\nu} + \kappa) - \gamma(1 + e^{\gamma\tau})} \\ \psi_2(\tau, u) = \frac{(e^{-\omega\tau} - 1)}{\omega} \\ \psi_3(\tau, u) = \frac{(iu - 1)}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\tau}) \\ \psi_4(\tau, u) = iu \end{array} \right. ,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \sqrt{(iu\xi\rho^{x,\nu} - \kappa)^2 - \xi^2(-u^2 - iu)} \\ a = \sqrt{\theta - \frac{\xi^2}{8\kappa}} \\ b = \sqrt{\nu_0} - \sqrt{\theta - \frac{\xi^2}{8\kappa}} \\ c = \ln \left[\frac{\sqrt{\nu_0} - \sqrt{\theta - \frac{\xi^2}{8\kappa}}}{\sqrt{\theta(1 - e^{-\kappa}) + \nu_0 e^{-\kappa}} - \frac{1}{4\kappa}\xi^2(1 - e^{-\kappa}) + \frac{\xi^2\theta(1 - e^{-\kappa})^2}{8\kappa[\theta(1 - e^{-\kappa}) + \nu_0 e^{-\kappa}]} - \sqrt{\theta - \frac{\xi^2}{8\kappa}}} \right] \end{array} \right. .$$

Sommaire

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

Conclusions et perspectives

Présentation pour
le prix IABE

**Benjamin Roelants
du Vivier**

Contexte

Objectif

Modélisation

Résumé

Résultat

**Conclusions et
perspectives**

► Conclusions :

☹️ Le prix à payer est une grande perte en interprétabilité en raison de la relative longueur et complexité des expressions.

► **Conclusions :**

😊 La double généralisation est possible et mène à des expressions semi-fermées !

☹️ Le prix à payer est une grande perte en interprétabilité en raison de la relative longueur et complexité des expressions.

- Focus sur la corrélation
- Focus sur la volatilité stochastique